Modelllösung a)

Bei gegebener Matrix $\ddot{U}_{a,b}$ kann der Bestand durch den Vektor $\begin{pmatrix} E \\ I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$ dargestellt werden.

Aus $\begin{pmatrix} E' \\ I_1' \\ I_2' \end{pmatrix} = \ddot{U}_{a,b} \cdot \begin{pmatrix} E \\ I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot I_1 + b \cdot I_2 \\ 0{,}1 \cdot E \\ 0{,}4 \cdot I_1 \end{pmatrix}$ ergeben sich damit die folgenden Zusammenhänge.

$E' = a \cdot I_1 + b \cdot I_2$: Gesamtzahl der Eier, die von Insekten der Entwicklungsstufen I_1 und I_2 gelegt werden,

$I_1' = 0{,}1 \cdot E$: Anzahl der Insekten der Entwicklungsstufe I_1, die sich aus 10 % der Eier entwickeln,

$I_2' = 0{,}4 \cdot I_1$: Anzahl der Insekten der Entwicklungsstufe I_2, in die sich 40 % der Insekten der Entwicklungsstufe I_1 verwandeln.

Das entspricht dem im Übergangsgraphen dargestellten Sachverhalt.

Die Parameter *a* bzw. *b* geben die Erzeugungsraten von Eiern durch Insekten der Entwicklungsstufe I_1 bzw. I_2 an.

Modelllösung b)

Mit $a = 10$ und $b = 5$ ergibt sich die Übergangsmatrix:

$\ddot{U} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 5 \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix}$. Der Startvektor lautet $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Mit $\vec{x}_k = \ddot{U} \cdot \vec{x}_{k-1} \quad (k = 1,2,3)$ erhält man die Verteilungsvektoren $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1000 \\ 0 \\ 40 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Modelllösung c)

Aus den Angaben des Aufgabentextes ergibt sich die veränderte Übergangsmatrix

$\ddot{U}_{neu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix}$. Für den Startvektor gilt nun $\vec{x}_0 = 0{,}4 \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix}$.

Für die zukünftigen Insektenpopulationen ergeben sich die Verteilungen

$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 80 \\ 40 \\ 3{,}2 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 80 \\ 1{,}6 \\ 3{,}2 \end{pmatrix} = 0{,}2 \cdot \vec{x}_0$. Daran erkennt man, dass die Population nicht überlebensfähig ist.

Zu dieser Aussage kann man auch durch allgemeine Rechnung oder unmittelbar durch Bildung des Produkts aus Erzeugungsrate und Überlebensraten kommen: $5 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}4 = 0{,}2 < 1$.

Modelllösung d)

Ausgehend von der Übergangsmatrix $\ddot{U}_a = \begin{pmatrix} 0 & a & 5 \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix}$ und dem Startvektor

$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2000 \\ 1000 \\ 0 \end{pmatrix}$ erhält man:

$$\ddot{U}_a^2 \cdot \begin{pmatrix} 2000 \\ 1000 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3200 \\ 600 \\ 80 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0{,}1a & 2 & 0 \\ 0 & 0{,}1a & 0{,}5 \\ 0{,}04 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2000 \\ 1000 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3200 \\ 600 \\ 80 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} 200a + 2000 = 3200 \\ 100a = 600 \\ 80 = 80 \end{array} \right| \Leftrightarrow a = 6$$

Modelllösung e)

$$Ü^4_{10;\,5} = (Ü^2_{10;\,5})^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0,5 \\ 0,04 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0,02 & 1 & 0,5 \\ 0,04 & 0,08 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$Ü^4_{10;\,5} \cdot \begin{pmatrix} E \\ I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E + 4 \cdot I_1 + I_2 \\ 0,02 \cdot E + I_1 + 0,5 \cdot I_2 \\ 0,04 \cdot E + 0,08 \cdot I_1 \end{pmatrix}.$$

Die Größe der Population $1,06 \cdot E + 5,08 \cdot I_1 + 1,5 \cdot I_2$ übertrifft nach vier Wochen die Größe $E + I_1 + I_2$ der Anfangspopulation wenigstens um einen Faktor $1,06$. Die Population wächst exponentiell und daher langfristig über alle Grenzen.

Alternative Lösungsmöglichkeiten:
Wenn man von einer Startpopulation ausgeht, die nur aus Eiern besteht, so ergibt sich:

$$Ü^2_{10;\,5} \cdot \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0,04 \cdot E \end{pmatrix},\ Ü^4_{10;\,5} \cdot \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ 0,02 \cdot E \\ 0,04 \cdot E \end{pmatrix},\ Ü^6_{10;\,5} \cdot \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,04 \cdot E \\ 0,04 \cdot E \\ 0,04 \cdot E \end{pmatrix}.$$

Die Anzahl der Eier hat nach 6 Wochen um 4 % zugenommen, die gesamte Population um 12 %. In der Startverteilung evtl. vorhandene Insekten (I_1 und I_2) legen zusätzliche Eier und erhöhen dadurch die Anzahl der Eier, auch wenn die Anzahl der Insekten (I_1 und I_2) selbst zwischenzeitlich rückläufig sein kann. Die Anzahl der Eier wächst also exponentiell mit einem Wachstumsfaktor von wenigstens $1,04$ bezogen auf 6 Wochen und mit ihr die Anzahl der daraus entstehenden Insekten (I_1 und I_2).

Alternativ kann auch anhand des Terms $0,1 \cdot a + 0,1 \cdot 0,4 \cdot b$, gebildet aus Erzeugungsraten von Eiern und Überlebensraten, argumentiert werden.