Testaufgabe zum Bereich

Problemstellungen mit Tangenten

Selbsteinschätzung <u>vor</u> der Bearbeitung der Testaufgabe:

Bitte kreuzen Sie an:

Ich kann	**sicher**	**ziemlich sicher**	**unsicher**	**sehr unsicher**	**Ich habe für diesen Bereich gearbeitet**			
					gar nicht, weil ich das schon konnte	ein wenig	recht viel	ausge-sprochen intensiv
die Gleichung der Tangente eines Funktionsgraphen zu einem **Punkt außerhalb des Graphen** bestimmen.								

Aufgabenstellung

a)

Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = -2x^2 + 3x + 5$. **Bestimmen Sie rechnerisch** alle Tangentengleichungen an den Graphen der Funktion f, die durch den Punkt $P(5/2)$ gehen.

b)

Gegeben sei die Funktion f : IR $\rightarrow$ IR mit $f(x) = 3\cdot x^3 - 4\cdot x + 2$ und der Punkt P (1/-6).
Ermitteln Sie die Gleichungen der Tangenten, die vom Punkt P aus den Graphen von f berühren!

Selbsteinschätzung <u>nach</u> der Bearbeitung und dem Vergleich der Lösungen.

Bitte kreuzen Sie an:

Ich kann	**sicher**	**ziemlich sicher**	**unsicher**	**sehr unsicher**	**Meine Selbsteinschätzung war richtig**			
					stimmt	stimmt teilweise	stimmt eher nicht	stimmt gar nicht
die Gleichung der Tangente eines Funktionsgraphen zu einem **Punkt außerhalb des Graphen** bestimmen.								

Mein Fazit zur Aufgabe und zu meiner Selbsteinschätzung:

Problemstellungen mit Tangenten

Lösung:
a)

Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = -2x^2 + 3x + 5$. **Bestimmen Sie rechnerisch** alle Tangentengleichungen an den Graphen der Funktion f, die durch den Punkt $P(5/2)$ gehen.

Lösung: Es gilt: $f'(x) = -4x + 3$

Ansatz: $t(x) = m \cdot x + n$

$$f'(x_B) = \frac{y_P - f(x_B)}{x_P - x_B} \Leftrightarrow -4x_B + 3 = \frac{2 + 2x_B^2 - 3x_B - 5}{5 - x_B}$$

$$x_B^2 - 10x_B + 9 = 0 \Rightarrow \underline{x_{B_1} = 1;\ x_{B_2} = 9}$$

$$y_{B_1} = f(x_{B_1}) = f(1) = 6 \Rightarrow \underline{B_1(1/6)}$$

$$y_{B_2} = f(x_{B_2}) = f(9) = -130 \Rightarrow \underline{B(9/-130)}$$

$$m_1 = f'(x_{B_1}) = f'(1) = -1 \qquad m_2 = f'(x_{B_2}) = f'(9) = -33$$

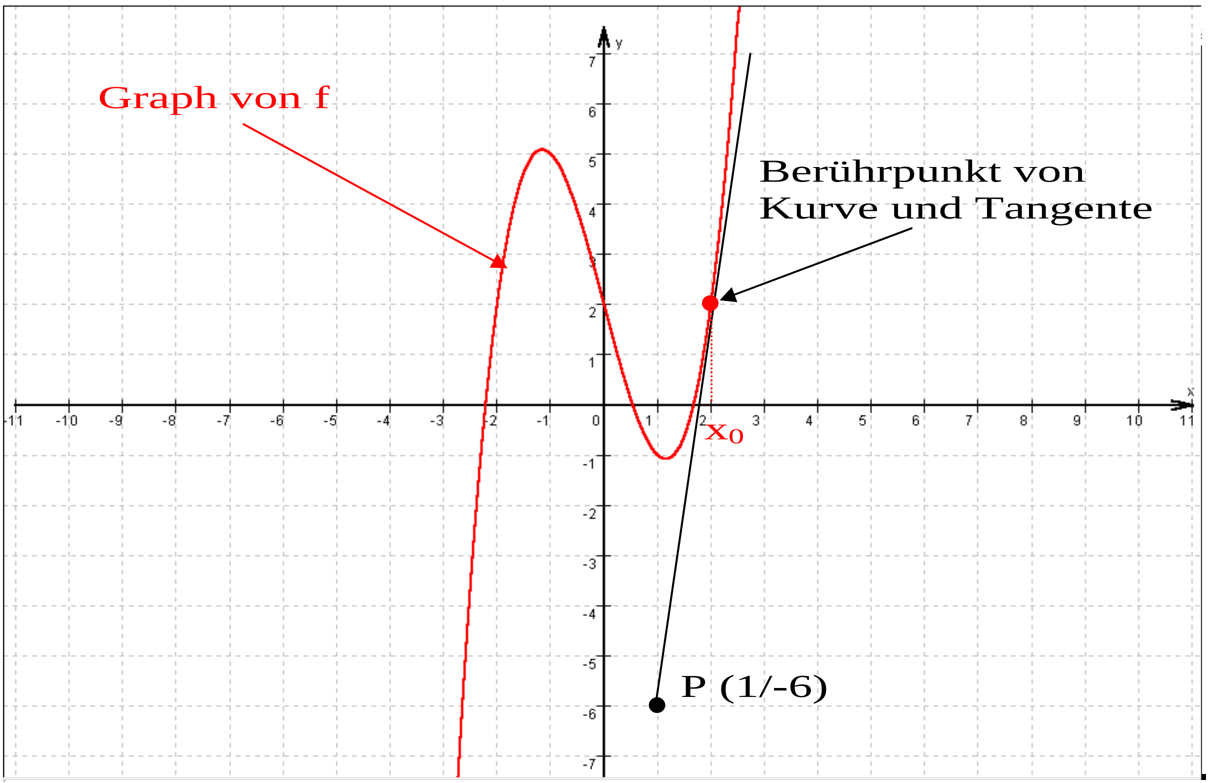
B_1 und m_1 in t_1 einsetzen:

$$6 = -1 \cdot 1 + n_1 \Rightarrow n_1 = 7 \Rightarrow \underline{t_1(x) = -x + 7}$$

B_2 und m_2 in t_2 einsetzen:

$$-130 = -33 \cdot 9 + n_2 \Rightarrow n_2 = 167 \Rightarrow \underline{t_2(x) = -33 \cdot x + 167}$$

b) Gegeben sei die Funktion f : IR $\rightarrow$ IR mit $f(x) = 3 \cdot x^3 - 4 \cdot x + 2$ und der Punkt P (1/-6). Ermitteln Sie die Gleichungen der Tangenten, die vom Punkt P aus den Graphen von f berühren!



Zur Aufstellung einer Geradengleichung benötigen wir nach der Punkt-Steigungsformel Punkt und Steigung einer Geraden. Da die Berührstelle x_0 unbekannt ist, können wir mit der 1. Ableitung – der Steigungsfunktion – die Steigung der Tangenten lediglich in x_0 ausdrücken.

Es ist $f'(x) = 3 \cdot x^2 - 4$ und damit $f'(x_0) = 3 \cdot x_0^2 - 4$. Mit der Punkt-Steigungsformel erhalten wir nun

$$f'(x_0) = \frac{y-(-6)}{x-1} \qquad \text{bzw.} \qquad y = f'(x_0)\cdot(x-1)-6$$

Für die Tangentengleichung t gilt also $y = t(x) = (3 \cdot x_0^2 - 4)\cdot(x-1)-6$.

Da für einen Berührpunkt zwei Bedingungen gelten – nämlich

I	$\mathbf{f(x_0)}$	=	$\mathbf{t(x_0)}$	(Übereinstimmung der y-Werte bei x_0)
II	$\mathbf{f'(x_0)}$	=	$\mathbf{t'(x_0)}$	(Übereinstimmung der Steigungen bei x_0)

haben wir mit der Gleichung I die Möglichkeit, die unbekannte Berührstelle x_0 zu bestimmen. Es gilt:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= t(x_0) \\ x_0^3 - 4x_0 + 2 &= (3x_0^2 - 4)\cdot(x_0 - 1) + (-6) \\ x_0^3 - 4x_0 + 2 &= 3x_0^3 - 3x_0^2 - 4x_0 + 4 - 6 \\ 0 &= 2x_0^3 - 3x_0^2 - 4 \end{aligned}$$

Der GTR liefert als einzige reelle Lösung $x_0 = 2$.
Damit ist x = 2 die einzig mögliche Berührstelle für eine Tangente vom Punkt (1/-6) an den Graphen der Funktion. Die Tangentengleichung lautet somit

$$y = 8 \cdot x - 14\ .$$