

Aufgabe 20: Spiegelung und Reflektion an einer Ebene

Gegeben sind die Punkte A(4|3|0), B(2|3|1), C(6|0|1) und L(8|5,5|6,5).

- Welchen Abstand hat der Punkt L von der Ebene E durch die Punkte A, B und C?
- Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes L', den man durch Spiegelung des Punktes L an der Ebene E erhält.
- Ein Lichtstrahl durch L und B wird an E reflektiert. Überprüfen Sie, ob die Punkte Q(2|14|14) und R(2|-2,5|-5,5) von dem reflektierten Strahl getroffen werden.
- Kontrollieren Sie ihre Ergebnisse mit Hilfe einer Zeichnung.

Aufgabe 21: Spiegelung an einer Geraden

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes P', der durch Spiegelung des Punktes P(1|2|1) an der Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ entsteht.}$$

Aufgabe 22: Spiegelung an einer Geraden

Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden g', die durch Spiegelung der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ an der

$$\text{Geraden } f: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ entsteht.}$$

Aufgabe 23: Spiegelung an einem Punkt

Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden g', die durch Spiegelung der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ am Punkt Z(3|2|1) entsteht.

Aufgabe 24: Spiegelung an einem Punkt

Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene E', die durch Spiegelung der Ebene E: $x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5$ am Punkt Z(-1|3|0) entsteht.

Aufgabe 25: Geschwindigkeiten, Reflektion

Der Partyjet des Sultans von Brunei befindet sich im Anflug auf den Flughafen Hong Kong. Zur Zeit $t = 0$ befindet er sich 10 km südlich und 11 km östlich der Insel Lantau in 5 km Höhe.

Der irische Pilot hält mit 540 km pro Stunde direkten Kurs auf einen 3 km über Lantau gelegenen Punkt und sinkt dabei 20 Meter pro Sekunde. Sein Whiskyglas ist leer.

Die erste und einzige Maschine der China Airsea Corp., eine günstig gebraucht erstandene B 737, befindet sich zur Zeit $t = 0$ in 4 km Höhe 20 km östlich und 4 km südlich von Lantau mit 720 km/h auf direktem Westkurs. Der Wahrsager des chinesischen Piloten hat ihn eindringlich vor den Gefahren des heutigen Tages gewarnt.

- Zeichne die Positionen und die Flugbahnen der beiden Flugzeuge in ein Koordinatensystem im Maßstab 1 : 100 000 (1 cm $\triangleq$ 1 km). Wähle Lantau als Koordinatenursprung. Die x_1 -Achse zeigt nach Süden, die x_2 -Achse nach Osten und die x_3 -Achse nach oben. (3)
- Wie nahe können sich die beiden Flugzeuge im ungünstigsten Fall kommen? (5)
- Zur Zeit $t = 0$ s befindet sich die B 737 20 km westlich von Lantau. Wie nahe kommen sich die beiden Flugzeuge tatsächlich? (4)
- Der Sultan blickt zur Zeit $t = 0$ s wohlgefällig hinunter auf seine Yacht, die genau 2 km südlich von Lantau auf der spiegelglatten See liegt. Ein Strahl der genau im Süden unter 45° stehenden Sonne wird vom Kabinenfenster der Yacht reflektiert und blendet den Sultan für einen Moment. Um wie viel Grad ist das Kabinenfenster geneigt? (5)

()

—

$$\vec{} =$$

|

2

2

2

^

$$\left| \overline{} \right| - \sqrt{13} \perp LE \quad d) S(-4|6|-1)$$

Aufgabe 20: Spiegelung und Reflektion an einer Ebene

a) $E: 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 24 \Rightarrow d = \sqrt{61}$

b) Normalenfußpunkt $F(5|1,5|0,5) \Rightarrow$ Bildpunkt $L'(2|-2,5|-5,5)$

c) Lichtstrahl $s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 6 \\ 2,5 \\ 5,5 \end{pmatrix}$ mit $r > 0 \Rightarrow$ reflektierter Lichtstrahl $s': \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r' \begin{pmatrix} 0 \\ 5,5 \\ 6,5 \end{pmatrix}$ mit $r' > 0$. Für r'

$= 2$ erhält man Q und für $r' = -1$ erhält man $R \Rightarrow Q \in s'$ und $R \notin s'$.

Aufgabe 21: Spiegelung an einer Geraden

Hilfsebene $E: -x_1 + x_3 = 0 \Rightarrow$ Lotfußpunkt $L(1|1|1) \Rightarrow P'(1|0|1)$

Aufgabe 22: Spiegelung an einer Geraden

Spiegelung des Punktes $P(1|1|1) \in g$ an f: Hilfsebene $E: x_2 + x_3 = 2 \Rightarrow$ Lotfußpunkt $L_P(2|\frac{5}{2}|\frac{1}{2}) \Rightarrow P'(3|4|-2)$

Spiegelung des Punktes $Q(0|1|2) \in g$ an f: Hilfsebene $E: x_2 + x_3 = 3 \Rightarrow$ Lotfußpunkt $L_Q(2|3|0) \Rightarrow Q'(4|5|-2)$

Die gespiegelte Gerade geht durch P' und Q' , also $g': \vec{x} = \overrightarrow{OP'} + t \overrightarrow{P'Q'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 23: Spiegelung an einem Punkt

Spiegelung von $P(1|1|1) \in g$ an Z ergibt $P'(5|3|1)$. Spiegelung von $Q(0|1|2) \in g$ an Z ergibt $Q'(6|3|0)$. Die

gespiegelte Gerade geht durch P' und Q' , also $g': \vec{x} = \overrightarrow{OP'} + t \overrightarrow{P'Q'} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 24: Spiegelung an einem Punkt

Spiegelung von $P(5|0|0) \in E$ an Z ergibt $P'(-7|6|1)$. Spiegelung von $Q(2|0|1) \in E$ an Z ergibt $Q'(-4|6|-1)$.

Spiegelung von $R(0|-1|1) \in E$ an Z ergibt $R'(-2|7|-1)$. Die gespiegelte Ebene geht durch P' , Q' und R' , also

$$E': \vec{x} = \overrightarrow{OP'} + r \overrightarrow{P'Q'} + s \overrightarrow{P'R'} = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ mit } r, s \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 25: Geschwindigkeiten, Reflektion

a) Zeichnung (3)

b) Ursprung $O(0|0|0)$ in Lantau, Weg in m, Zeit in s, Geschwindigkeiten in m/s

$$\Rightarrow 540 \text{ km/h} = 150 \text{ m/s} = v \cdot \sqrt{10^2 + 11^2 + 20^2} = v \cdot 15 \Rightarrow v = 10 \Rightarrow \text{Partyjet } g: \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 10000 \\ 11000 \\ 5000 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -100 \\ -110 \\ -20 \end{pmatrix}$$

$$\text{und B 737 h: } \vec{y}(t) = \begin{pmatrix} 4000 \\ 20000 \\ 4000 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{gemeinsamer Normaleneinheitsvektor } \vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Abstand } d = \left| \frac{1}{\sqrt{26}} \left[\begin{pmatrix} 10000 \\ 11000 \\ 5000 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4000 \\ 0 \\ 4000 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \right| = \frac{1000}{\sqrt{26}} \approx 196,1 \text{ m.} \quad (5)$$

$$c) d(t) = \sqrt{(\vec{y} - \vec{x})^2} = \sqrt{(6000 - 100 \cdot t)^2 + (9000 - 90 \cdot t)^2 + (1000 - 20 \cdot t)^2} \quad (3)$$

$$\Rightarrow (\text{GTR}) \text{ Minimum zur Zeit } t = 77,3 \text{ s mit Abstand } d = 2732,2 \text{ m} \quad (1)$$

d) Die Yacht liegt in $P(2000|0|0)$, der Partyjet ist in $Q(10000|-11000|5000)$ (1)

$$\Rightarrow \text{gespiegelter Sonnenstrahl } g': \vec{y} = \begin{pmatrix} 2000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -11 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Der Neigungswinkel des eintreffenden Sonnenstrahls zur Senkrechten ist $\alpha_1 = 45^\circ$. (1)

Der Neigungswinkel des gespiegelten Sonnenstrahls zur Senkrechten ist

$$\alpha_2 = \cos^{-1} \left(\frac{\begin{pmatrix} 8 \\ -11 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{210} \cdot 1} \right) \approx \cos^{-1}(0,345) \approx 69,8^\circ \quad (1)$$

Wegen Einfallswinkel = Ausfallwinkel ist dann der Neigungswinkel der Normalen des Kabinendaches zur

$$\text{Senkrechten } \alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = 57,4^\circ = \text{Neigungswinkel des Kabinendaches zur Waagrechten} \quad (1)$$