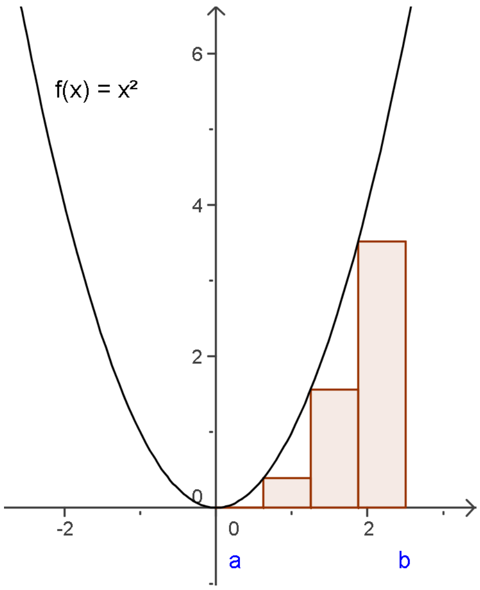
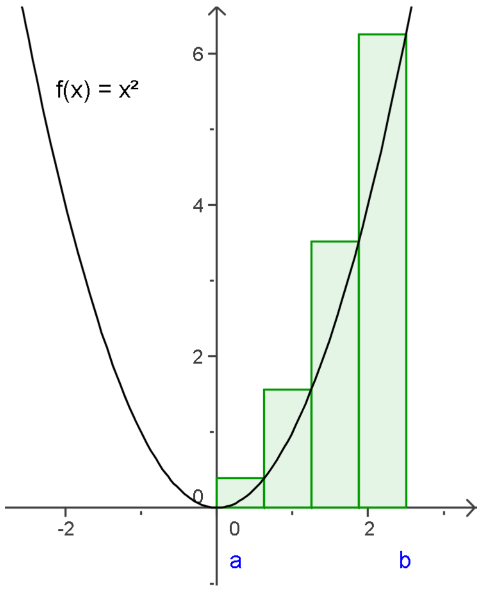
Ober- und Untersummen quadratische Funktion

Aufgabe: Berechne den Flächeninhalt unter der Kurve f(x) = x² im Intervall von a = 0 bis b mit Hilfe von Ober- und Untersummen!

Anleitung



Untersumme



Obersumme

Unterteilung in **n Rechtecke** mit einer **Intervallbreite** von **Δx = b/n .**

Untersumme

U_n
$$= \Delta x \cdot \left(f(0) + f(\Delta x) + f(2 \cdot \Delta x) + ... + f((n-1) \cdot \Delta x) \right) =$$
$$= \frac{b}{n} \cdot \left[0 + \left(\frac{b}{n} \right)^2 + \left(2 \cdot \frac{b}{n} \right)^2 + ... + \left((n-1) \cdot \frac{b}{n} \right)^2 \right] =$$
$$= \left(\frac{b}{n} \right)^3 \cdot \left[0 + 1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2 \right]$$

Obersumme

O_n
$$= \Delta x \cdot \left(f(\Delta x) + f(2 \cdot \Delta x) + ... + f((n-1) \cdot \Delta x) + f(n \cdot \Delta x) \right) =$$
$$= \frac{b}{n} \cdot \left[\left(\frac{b}{n} \right)^2 + \left(2 \cdot \frac{b}{n} \right)^2 + ... + \left((n-1) \cdot \frac{b}{n} \right)^2 + \left(n \cdot \frac{b}{n} \right)^2 \right] =$$
$$= \left(\frac{b}{n} \right)^3 \cdot \left[0 + 1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2 + n^2 \right]$$

Mit der Formel $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$ und mit der Tatsache, dass der Flächeninhalt zwischen Unter- und Obersumme liegen muss, folgt

$$\mathbf{U_n} \leq \mathbf{A} \leq \mathbf{O_n}$$

$$\mathbf{U_n} = \frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{1}{6}\cdot(n-1)\cdot(n-1+1)\cdot(2(n-1)+1) \;\leq\; \mathbf{A} \;\leq\; \frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{1}{6}\cdot n\cdot(n+1)\cdot(2n+1) \;=\; \mathbf{O_n}$$

$$\frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{1}{6}\cdot(n-1)\cdot n\cdot(2n-1) \;\leq\; \mathbf{A} \;\leq\; \frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{1}{6}\cdot n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)$$

Nun heben wir n in den Klammerausdrücken heraus

$$\frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{1}{6}\cdot n\cdot(1-\frac{1}{n})\cdot n\cdot n\cdot(2-\frac{1}{n}) \;\leq\; \mathbf{A} \;\leq\; \frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{1}{6}\cdot n\cdot n\cdot(1+\frac{1}{n})\cdot n\cdot(2+\frac{1}{n})$$

und kürzen n^3

$$b^3\cdot\frac{1}{6}\cdot(1-\frac{1}{n})\cdot(2-\frac{1}{n}) \;\leq\; \mathbf{A} \;\leq\; b^3\cdot\frac{1}{6}\cdot(1+\frac{1}{n})\cdot(2+\frac{1}{n}) \;.$$

Beim Grenzübergang für $n \to \infty$ ergibt sich somit

$$b^3\cdot\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2 \;\leq\; \mathbf{A} \;\leq\; b^3\cdot\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2$$

$$\frac{b^3}{3} \;\leq \mathbf{A} \;\leq\; \frac{b^3}{3}$$

Das Ergebnis ist also

$$\int_0^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3}$$

Vermutung

Aufgrund der Ergebnisse beim Beispiel über lineare Funktionen könnte für das bestimmte Integral mit beliebigen Grenzen a und b vielleicht folgende Lösung in Frage kommen:

$$\boxed{\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}}$$

Zusammenfassung

Flächenberechnungen mittels Ober- und Untersummen führen zum gewünschten Ziel, sind aber langwierig und umständlich.

Ziel der weiteren Überlegungen ist es daher, einfachere Rechenregeln zum Berechnen für bestimmte Integrale zu finden.