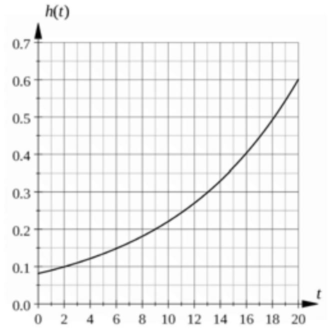
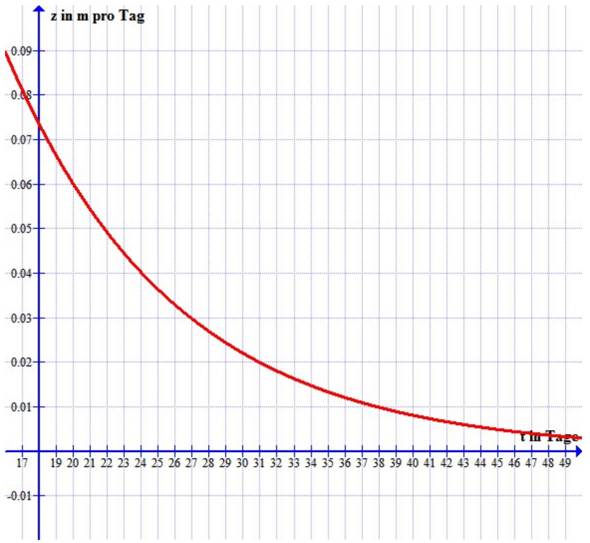
Aufgabe 5 (Nach NRW Abitur 2009)
Die Höhe eines Strauches in den ersten zwanzig Tagen nach dem Auspflanzen wird durch die Funktion h mit der Funktionsgleichung $h(t) = 0{,}2 \cdot e^{0{,}1t-0{,}9}$ (t in Tagen, $h(t)$ in Metern) beschrieben. Vom Beginn des 21. Tages an ($t = 20$) verringert sich die Wachstumsgeschwindigkeit des Strauches. Von diesem Zeitpunkt an ist **nur noch** die **Zuwachsrate** bekannt, sie wird beschrieben durch die Funktion z mit der Funktionsgleichung $z(t) = 0{,}02 \cdot e^{-0{,}1t+3{,}1}$ (z(t) in Meter pro Tag).



a) Berechnen Sie den Funktionswert von h an der Stelle t = 0 und interpretieren Sie diesen Wert im Sachzusammenhang. Geben Sie anhand der nebenstehenden Abbildung an, zu welchem Zeitpunkt der Strauch eine Höhe von 50 cm hat. Bestimmen Sie den Wert rechnerisch.

b) Bestimmen Sie den Zeitpunkt t innerhalb der ersten zwanzig Tage ($0 \le t \le 20$), an dem die Pflanze am schnellsten wächst. Berechnen Sie die zugehörige Wachstumsgeschwindigkeit. Begründen Sie, warum die angegebene Funktion h nur für einen begrenzten Zeitraum die Höhe der Pflanze beschreiben kann.



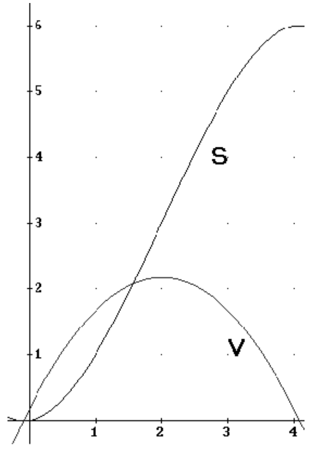
c) Bestimmen Sie möglichst genau, wie groß der Strauch am Ende des 20. Tages ist und um wie viel er in den folgenden 10 Tagen wächst.

d) Erläutern Sie, wie man mit Hilfe der Integration über z(t) die mittlere Zuwachsrate während des 21. Tages und des 41. Tages bestimmen kann.

Aufgabe 6 (Nach NRW Abitur 2009)
Im Rahmen eines Schulprojektes führen Schülerinnen und Schüler unterstützt durch die Polizei eine Geschwindigkeitskontrolle durch. Auf einem 6 km langen Stück Landstraße werden nach Kilometer 1, 3 und 6 die Fahrzeiten gemessen. Die Messstrecke beginnt an einem Stoppschild; die zulässige Höchstgeschwindigkeit auf der Landstraße beträgt 100 km/h. Ihre Messergebnisse haben die Schülerinnen und Schüler in der folgenden Tabelle festgehalten:

Messung	am Stoppschild	Messung 1	Messung 2	Messung 3
Zeitpunkt t in Minuten	0	1	2	4
Zurückgelegter Weg $s(t)$ in km	0	1	3	6

Die Funktion $s(t)$ beschreibt den zurückgelegten Weg vom Zeitpunkt 0 bis zum Zeitpunkt t. Die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t ist $v(t)$ und die Beschleunigung zum Zeitpunkt t wird mit $a(t)$ bezeichnet. (Hinweis: Es gilt: $s'(t) = v(t)$ und $v'(t) = a(t)$.)



a) Eine Schülergruppe hat die Messergebnisse mit einer Gleichung einer ganzrationalen Funktion dritten Grades modelliert, die den zurückgelegten Weg in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. Bestimmen Sie diese Gleichung.

b) Es sei $s(t) = -\frac{1}{6}t^3 + t^2 + \frac{1}{6}t$. Der Graph zu s(t) und v(t) ist nebenstehend abgebildet.
Geben Sie die Gleichung der Geschwindigkeitsfunktion v an und ermitteln Sie mit Hilfe des Graphen zu dieser Geschwindigkeitsfunktion den zurückgelegten Weg während der Messzeit der Schüler. Prüfen Sie auch, ob der Fahrer (in der Modellsituation) am Stoppschild gehalten hat.

c) Erläutern Sie, wie man mit Hilfe der Integration über v(t) die mittlere Geschwindigkeit während der vier Beobachtungsminuten bestimmen kann.

Aufgabe 7 (Nach NRW Abitur 2009)

Eine Population von Mikroorganismen wird unter Laborbedingungen gezüchtet. Im Folgenden soll unter der „Größe der Population“ die Gesamtmasse aller Mikroorganismen dieser Population verstanden werden. Die Größe der Population beträgt zum Zeitpunkt $t = 0$, d. h. zu Beginn des ersten Tages, 29 mg. Die Funktion p mit der Gleichung

$$p(t) = (\frac{1}{3} \cdot t^2 + 5 \cdot t - 9) \cdot e^{\frac{1}{9}t} \quad , t \geq 0,$$

beschreibt die **momentane Wachstumsrate (in mg pro Tag)**, mit der sich die Größe der Population zunächst entwickelt; t entspricht der verstrichenen Zeit in Tagen ab Beobachtungsbeginn.

a)

(1) Berechnen Sie die Funktionswerte p(0) und p(3) .

(2) Berechnen Sie die Nullstelle der Funktion p.

(3) Beschreiben Sie anhand des in Abbildung 1 dargestellten Graphen von p und der Ergebnisse aus (1) und (2), wie sich die **Größe der Population** in den ersten drei Tagen entwickelt.

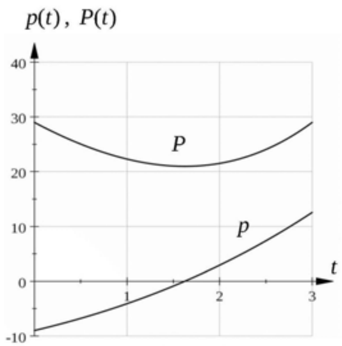


Abbildung 1

b) Ermitteln Sie die Werte der Integrale über p(t) von 0 bis 1 und von 0 bis 2 und von 0 bis 3. Vergleichen Sie die Werte und interpretieren Sie sie im Sachzusammenhang.

c) In Abbildung 1 ist auch ein Graph für die „Größe der Population“ abgebildet. Weisen Sie nach, dass durch die Funktion P mit der Gleichung $P(t) = (3t^2 - 9t)e^{\frac{1}{9}t} + 29$, t > 0

die Größe der Population in Abhängigkeit von der Zeit beschrieben werden kann.

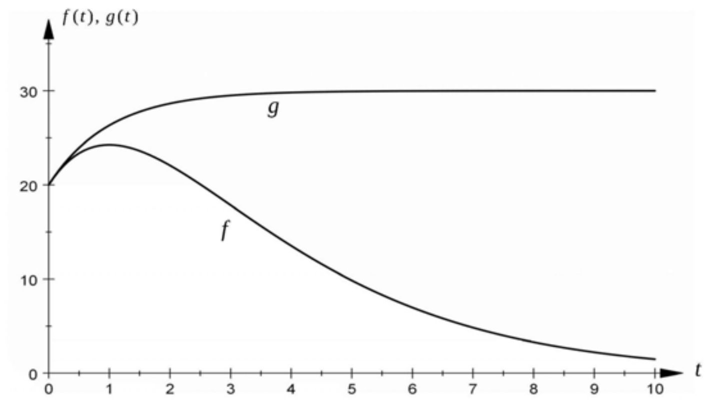
d) Erläutern Sie, wie man mit Hilfe der Integration über p(t) die mittlere Wachstumsrate während der ersten drei Tage bestimmen kann.

Aufgabe 8 (Nach NRW Abitur 2008)

Ein Forschungslabor untersucht Substanzen mit antibakterieller Wirkung. Man unterscheidet bei diesen Substanzen zwei Wirkungstypen:
Substanzen mit bakteriostatischer Wirkung hemmen die Vermehrung der Bakterien, während Substanzen mit bakterizider Wirkung Bakterien nicht nur in ihrer Vermehrung hemmen, sondern auch abtöten.
Im Rahmen eines Versuchs wird der Nährlösung zweier Bakterienkulturen zeitgleich jeweils eine Substanz unterschiedlichen Wirkungstyps zugesetzt. Die Bakterienzahl der Bakterienkulturen zum Zeitpunkt t nach dem Zusetzen der Substanzen kann modellhaft durch die Funktionen

f mit $f(t) = 20 \cdot (t+1) \cdot e^{-0,5t}, t \geq 0,$ (1. Bakterienkultur) und
g mit $g(t) = 30 - 10 \cdot e^{-t}, t \geq 0,$ (2. Bakterienkultur) beschrieben werden.

Dabei wird die Zeit t in Stunden seit Zusetzen der Substanzen $(t = 0)$ und die Bakterienzahl $f(t)$ und $g(t)$ in Millionen (10^6) angegeben.
Die Graphen der Funktionen f und g sind in der untenstehenden Abbildung dargestellt.



a) Berechnen Sie die Funktionswerte f (10) und g(10) und beschreiben Sie den Verlauf der Graphen von f und g im Sachzusammenhang.
Ermitteln Sie für beide Bakterienkulturen, welche Bakterienzahl langfristig erwartet wird, und geben Sie jeweils den Wirkungstyp der Substanz an, die der Bakterienkultur zugesetzt wurde.

b) Ermitteln Sie jeweils die Werte des Integrals über f und g von 0 bis 10 und berechnen Sie mit diesen Werten die durchschnittliche Bakterienzahl während der ersten zehn Beobachtungsstunden.

c) Erläutern Sie, wie man die durchschnittliche Bakterienzahl während der ersten k Stunden finden kann.