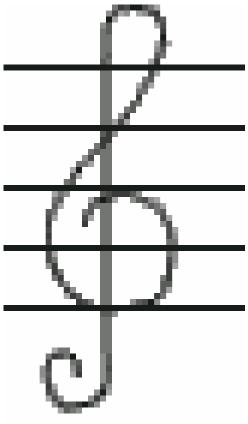
Analytische Darstellung des Violinen-G-Schlüssels



Charlotte Oehl

Gustav-Heinemann-Gesamtschule Alsdorf

Mathematik LK

Schuljahr 2005/2006

Herr Großmann

31.03.2006

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Im Folgenden werde ich einen Violinen-G-Schlüssel mit Hilfe von Spiralen, ganzrationalen Funktionen und Geraden auf dem GTR Casio CFX-9850GC Plus grafisch darstellen.

2. Der Violine-G-Schlüssel

Der Violinschlüssel wird auch G-Schlüssel genannt. Er wird zur Aufzeichnung der hohen Lagen in der Musik verwendet.

Mit dem G-Schlüssel wird das "eingestrichene g" auf der zweit untersten Linie festgelegt.

Das Liniensystem der Musik wurde 1025 von Guido Arezzo erfunden. Damals bestand dieses System allerdings noch aus vier Linien und nicht, wie heute, aus fünf Linien. Der erste Notenschlüssel war der C-Schlüssel. Es gibt fünf verschiedene C-Schlüssel: den Sopranschlüssel, den Mezzosopranschlüssel, den Altschlüssel, den Tenorschlüssel und den Baritonschlüssel.

Um Instrumentalmusik aufzuzeichnen, die für die menschliche Stimme zu hoch war, wurde bald ein Schlüssel gebraucht, der höher war als die vorigen Schlüssel. So entstand um 1200 der Violinschlüssel, der zunächst, wie der Name schon sagt, nur für Violinen vorgesehen war. Das Aussehen des Violinschlüssels entwickelte sich aus einem G, weshalb er auch G-Schlüssel genannt wird. Da jeder Notenschlüssel den Anfang der Zeile markiert wurden sie, genau wie Anfangsbuchstaben, verschnörkelt. So entwickelte sich die heutige Form der Notenschlüssel.

Der Violinschlüssel löste bald den C-Schlüssel ab. Für die Aufzeichnung der Gesangsstimmen setzte er sich allerdings erst in der zweiten Hälfte des 19.

Jahrhunderts als Standard durch.

Ein Notenschlüssel, der auf einer anderen Linie als gewöhnlich liegt, wird als Chiavette bezeichnet. Solche Chiavetten waren früher normal. So entstanden die verschiedenen C-Schlüssel. In der französischen Barockmusik kann man häufig einen Violinschlüssel finden der auf der untersten Linie liegt. Violinschlüssel, die auf der untersten Linie liegen, werden deshalb auch als französische Violinschlüssel bezeichnet.

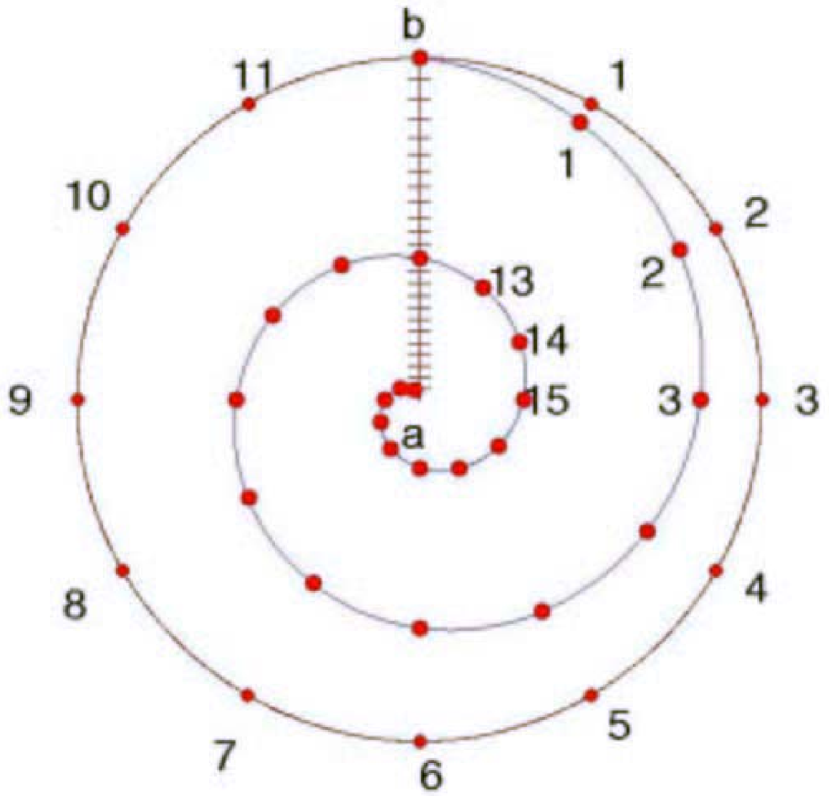
Heute benutzt man keine Chiavetten mehr, statt dessen verwendet man eine kleine 8, die über oder unter den Notenschlüssel geschrieben wird, um eine Oktavierung nach oben oder unten anzuzeigen. Es kommt sogar vor dass eine kleine 15 anstelle der 8 verwendet wird. Diese 15 zeigt eine Verschiebung um zwei Oktaven an, die 8 zeigt eine Verschiebung um eine Oktave an.

Man sollte den Violinschlüssel jedoch nicht als Sopranschlüssel bezeichnen, auch wenn er zur Aufzeichnung der sopranen Gesangsstimmen verwendet wird. Es gibt schließlich schon einen C-Schlüssel, der auch als Sopranschlüssel bezeichnet wird. Diese Doppelbezeichnung würde nur zu unnötiger Verwirrung führen.

(Zusammenfassung gemäß „http://de.wikipedia.org/wiki/Notenschlüssel“)

3. Die Spirale

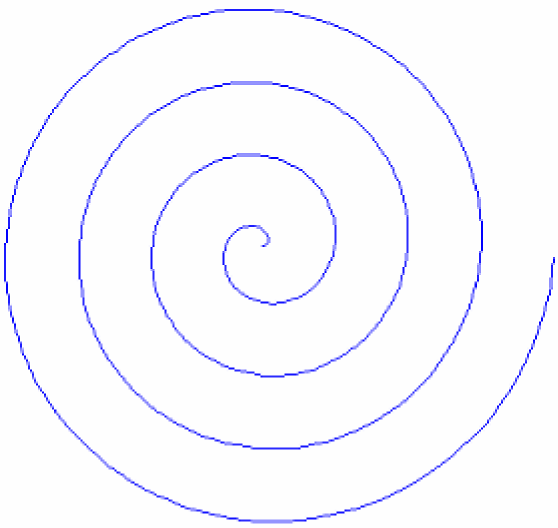
Bereits Albrecht Dürer hat im ersten Buch seiner aus vier Büchern bestehenden "Underweysung der messung mit dem zirckel un richtscheyt..." drei Konstruktionsmöglichkeiten für Spiralen angegeben.
Bei seiner zweiten Konstruktion geht er wie folgt vor:
Zunächst zieht er einen Kreis. Der Umfang dieses Kreises wird dann in zwölf gleich große Teile unterteilt, wodurch auch zwölf Punkte entstehen. Nun zieht er vom Mittelpunkt des Kreises (a) zu dem Punkt zwölf (b) eine Linie, den Radius des Kreises. Dieser Radius wird in 24 gleich große Teile unterteilt, welche auf ein Lineal überträgt, hierbei benennt er die Punkte mit den Zahlen von 1 bis 23. Nun legt er das Lineal an den Punkt a so an, dass es sich mit dem Punkt 1 des Kreises schneidet, nun kann er die Markierung 1 von dem Lineal auf das Papier übertragen. So geht er weiter vor bis er alle Punkte vom Lineal aufs Papier übertragen hat. Die so entstandene Spirale kann man natürlich beliebig verlängern, wenn man weitere Teilpunkte vom Radius auf das Lineal überträgt.



(Gemäß „http://www.divide-by-zero.com/akcad/spirale.pdf“)

3.1. Die Archimedische Spirale

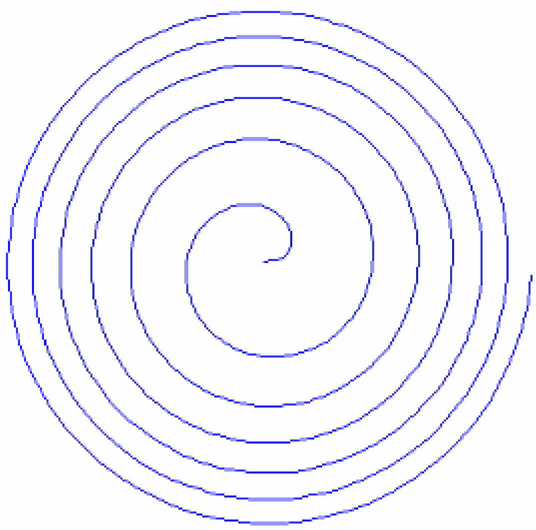
Die einfasten Spiralen werden durch Gleichungen die wie folgt aussehen beschrieben: $r=a*\varphi$ (a ungleich 0). Diese Spirale wird nach ihrem Entdecker als archimedische Spirale bezeichnet. Diese Spirale hat Dürer auch in seiner zweiten Konstruktion beschrieben. Die Spirale kann man im negativen und im positiven Winkelbereich darstellen, wobei die Darstellung im negativen Bereich die Spiegelung des positiven Bereiches ist.



(Gemäß „http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/archimedesspirale.html“)

3.2. Die Fermatsche Spirale

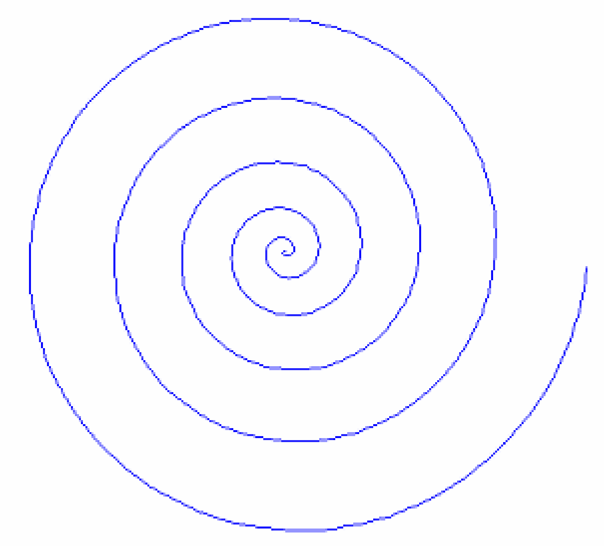
Diese Spirale wurde von Pierre Fermat entdeckt. Sie ist eine Variation der archimedischen Spirale und dieser sehr ähnlich. Das charakteristische der fermatschen Spirale ist, dass die Windungen, je weiter sie vom Mittelpunkt der Spirale entfernt sind, immer enger werden. Dies wird durch die Erhöhung der Potenz von r und a erreicht, je höher der Grad der Potenz ist desto enger verlaufen die Windungen. Dadurch verliert die Spirale an Durchmesser. Diese Spirale hat die Gleichung $r^2=a^2*\varphi$ (a ist ungleich 0).



(Gemäß „http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/spiralen/s_fermat.html“)

3.3. Die Galileische Spirale

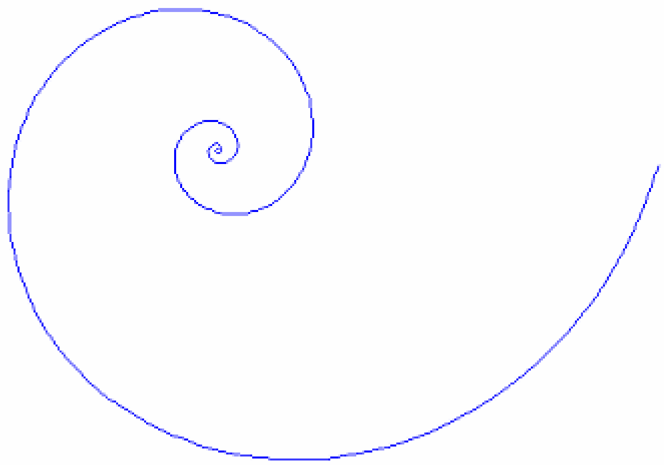
Galileo Galilei hat schon mit dieser Spirale gearbeitet, woher sie auch ihren Namen hat. Genau wie die fermatsche Spirale ist die galileische Spirale eine Abwandlung der archimedischen Spirale. Hier wird die Potenz von φ erhöht. Dadurch erhöht sich, anders als bei der fermatschen Spirale, der Abstand der Windungen voneinander. Hier gilt: Je höher der Grad von φ ist, desto größer wird der Abstand zwischen den Windungen. Bei der Darstellung der Spirale wird diese Gleichung verwendet: $r=a*\varphi^2$ (a ist ungleich 0).



(Gemäß „http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/spiralen/s_galilei.html“)

3.4. Die Logarithmische Spirale

Die logarithmische Spirale hat die Gleichung: r=r0*e^(a*φ) (wobei man für r0 und a alle reellen Zahlen einsetzten kann, außer 0). Der Radius dieser Spirale "wächst exponentiell mit dem Polarwinkel". Auch wird der Abstand der Windungen mit zunehmender Entfernung vom Mittelpunkt immer größer. Außerdem ist der "Polarwinkel logarithmisch vom Radius abhängig", weshalb es sich hier um eine logarithmische Spirale handelt. Die logarithmische Spirale kommt auch in der Natur vor, das Gehäuse einer Nautilus zum Beispiel weist die Windungen einer logarithmischen Spirale auf.



(Gemäß „http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/spiralen/s_logarithm.html“)

4. Entstehung des G-Schlüssels

Im folgenden Kapitel wird der G-Schlüssel entstehen. Dazu werden zunächst mehrere Spiral-, Geraden- und Funktionsstücke zusammengesetzt. Danach müssen die Übergänge geglättet werden, sodass möglichst keine Ecken entstehen.

4.1. Zusammensetzen

In diesem Kapitel werde ich den G-Schlüssel zusammensetzen. Hierzu werde ich die verschiedenen Stücke des G-Schlüssels grafisch, auf dem GTR, darstellen.

Ich beginne mit der großen Spirale des G-Schlüssels. Hierfür benötige ich zunächst zwei Spiralen. Von diesen Spiralen verwende ich allerdings nur die Teilstücke, die ich brauche, der Rest der Spirale liegt dann außerhalb des von mir festgelegten Definitionsbereich. Die Spiralen, die ich hier verwenden möchte, habe ich in Parameterform festgehalten. Die erste Spirale hat die Gleichungen:

Xt1=((-3,6T)/(2π))*cosT+0,25

Yt1=((2,8T)/(2π))*sinT+0,3

Die zweite Spirale hat die Gleichungen:

Xt2=((-16T)/(2π))*cosT

Yt2=((17T)/(2π))*sinT-1,83

Nach diesen Spiralen kommen vier ganzrationale Funktionen, welche ich anhand mehreren, von mir festgelegten, Punkten ermitteln konnte. Diese Funktionen werde ich hier der Reihe nach mit den festgelegten Punkten auflisten.

Die erste Funktion sollte durch die Punkte A(-1,27058;0,82241) und B(1,7;5,5) gehen und einen Wendepunkt im Punkt C(0;3) haben. Die so ermittelte Funktion hat die Gleichung:

$f_1(x)=-0,1907x^3+2,02172x+3$

Die zweite Funktion sollte durch die Punkte B(1,7;5,5), C(0;3) und D(1,5;5) gehen. Die entstandene Funktion hat die Gleichung:

$f_2(x)=({}^{35}/_{51})x^2+({}^{31}/_{102})x+3$

Die dritte Funktion musste durch die Punkte B(1,7;5,5), E(0;6,2) und F(0,8;6,8) gehen. Diese Funktion hat die Gleichung:

$f_3(x)=(-1{}^{89}/_{306})x^2+(1{}^{479}/_{612})x+6,2$

Die vierte und letzte dieser Funktionen sollte durch die Punkte G(0,01132;-3,4775) und H(-0,2;5,7918) verlaufen. Im Punkt I(-0,05;0) sollte sie einen Wendepunkt haben. Die Funktion hat die Gleichung:

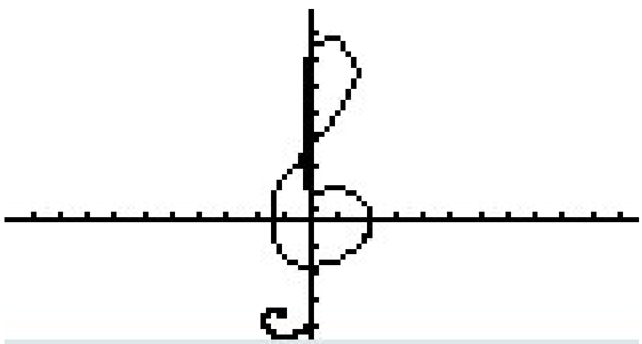
$f_4(x)=358,8316x^3-57,4507x-2,8277$

Als Letztes schließt noch eine Spirale an welche den Schluss des G-Schlüssels bildet. Diese Spirale wird auch in Parameterform dargestellt. Sie hat die Gleichungen: Xt3=((1,1T)/(2π))*cosT-1,1
Yt3=(T/(2π))*sinT-3,7

Als Nächstes müssen alle Spiralen und Funktionsstücke in einem Koordinatensystem dargestellt werden. Dazu muss das View-Window des GTR richtig eingestellt werden. Die x-Achse wird von -12 bis 12 dargestellt. Die y-Achse wird von -5 bis 7 dargestellt. Da die Spiralen im Radianten dargestellt werden muss T auch festgelegt werden. T ist hier von 0 bis 10 festgelegt.

Da ich nur bestimmte Stücke der Spiralen und Funktionen darstellen möchte, muss der Definitionsbereich der Spirale und Funktionen festgelegt werden. Ich werde im Folgenden noch einmal alle Gleichungen auflisten, und zwar mit der Schreibweise, wie sie auf dem GTR zu verwenden ist. Zu diesen Gleichungen werde ich sofort den Definitionsbereich festlegen.

Xt1=((-3.6T)/(2π))*cosT+0.25
Yt1=((2.8T)/(2π))*sinT+0.3,[0,4.8]
Xt2=((-16T)/(2π))*cosT
Yt2=((17T)/(2π))*sinT-1.83,[0,1.45]
$f_1(x)=-0.1907x^2+2.02172x+3$,[-0.4449,0]
$f_2(x)=({}^{35}/_{51})x^2+({}^{31}/_{102})x+3$,[0,1.7]
$f_3(x)=(-1{}^{89}/_{306})x^2+(1{}^{479}/_{612})x+6.2$,[-0.2,1.7]
$f_4(x)=358.8316x^3-57.4507x-2.8277$,[-0.2,0,01132]
Xt3=((1.1T)/(2π))*cosT-1.1
Yt3=(T/(2π))*sinT-3.7,[0,6.5]



Wenn man diese Gleichungen so in den GTR eingibt und das View-Window so eingestellt hat wie oben beschrieben, bekommt man einen G-Schlüssel der allerdings noch ein paar „Dellen“ und „Ecken“ hat.
Der erste Entwurf des G-Schlüssels ist damit allerdings fertig.

4.2. Übergänge glätten

Im folgenden Kapitel geht es darum die "Dellen" und Kanten des G-Schlüssels zu glätten, sodass ein einheitlicher und schöner G-Schlüssel entsteht. Da ich hauptsächlich mit den ganzrationalen Funktionen unzufrieden bin, werde ich mich hierbei auf die Verbesserung des Anschlusses dieser Funktionen aneinander und an die Spiralen konzentrieren. Hierzu werde ich mich zunächst entscheiden müssen, welche Steigung die Funktionen an den kritischen Punkten haben sollen und gegebenenfalls werde ich neue Punkte suchen müssen. Dann werde ich die Ableitungen bilden müssen und die Funktionen angleichen. Eventuell muss ich auch die eine oder andere Gleichung komplett neu entwickeln, wofür ich dann die zusätzlichen Punkte benötigen würde.

4.2.1. Ableitungen

In diesem Kapitel werde ich mich um die Ableitungen der Funktionen kümmern. Dazu werde ich zunächst die erste und zweite Ableitung aller ganzrationalen Funktionen im G-Schlüssel anfertigen. Diese Ableitungen werde ich zusammen mit den Ausgangsfunktionen festhalten.

$f_1(x)=-0,1907x^2+2,02172x+3$

$f_1'(x)=-0,3814x+2,02172$

$f_1''(x)=-0,3814$

$f_2(x)=({}^{35}/_{51})x^2+({}^{31}/_{102})x+3$

$f_2'(x)=({}^{70}/_{51})x+({}^{31}/_{102})$

$f_2''(x)={}^{70}/_{51}$

$f_3(x)=(-1{}^{89}/_{306})x^2+(1{}^{479}/_{612})x+6,2$

$f_3'(x)=(-2{}^{89}/_{153})x+(1{}^{479}/_{612})$

$f_3''(x)=(-2{}^{89}/_{153})$

$f_4(x)=358,8316x^3-57,4507x-2,8277$

$f_4'(x)=1076,4948x^2-57,4507$

$f_4''(x)=2152,9896x$

Mithilfe dieser Funktionen und Ableitungen kann ich prüfen ob die Funktionen sauber ineinander übergehen, oder nicht. Wenn sie nicht „sauber ineinander" übergehen, muss ich im folgenden Kapitel die nötigen Korrekturen vornehmen.

Zuerst prüfe ich, ob die Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ sauber ineinander übergehen. Sie gehen im Punkt C(0;3) ineinander über. Um diese Prüfung vorzunehmen, setze ich den x-Wert des Punktes in die Gleichungen ein und kann so feststellen, ob sie in den Ableitungen dieselben Werte aufweisen. Wenn sie dieselben Werte aufweisen, gehen sie „sauber ineinander" über, wenn dies nicht der Fall sein sollte muss ich Korrekturen vornehmen. Ich setze also in die Gleichungen $f_1'(x)$ und $f_2'(x)$ den Wert x=0 ein. Dann habe ich als Ergebnis:

$f_1'(0)=2,02172$

$f_2'(0)={}^{31}/_{102}$

Daraus kann man schließen, dass die beiden Gleichungen nicht sauber ineinander übergehen.

Als Nächstes vergleiche ich die Funktionen $f_2(x)$ und $f_3(x)$ im Punkt B(1,7;5,5). Als Ergebnis bekomme ich hier:

$f_2'(1{,}7)=2\,{}^{65}/_{102}$

$f_3'(1{,}7)=-2\,{}^{371}/_{612}$

Auch hier werde ich Korrekturen vornehmen müssen.

Zuletzt werde ich noch die Funktionen $f_3(x)$ und $f_4(x)$ untersuchen müssen. Ich werde sie im Punkt H(-0,2;5,7918) prüfen. Dies ist das Ergebnis:

$f_3'(-0{,}2)=2\,{}^{61}/_{204}$

$f_4'(-0{,}2)=-14{,}3909$

Es kommt also heraus, dass ich an allen ganzrationalen Funktionen Korrekturen vornehmen muss, was allerdings zu erwarten war.

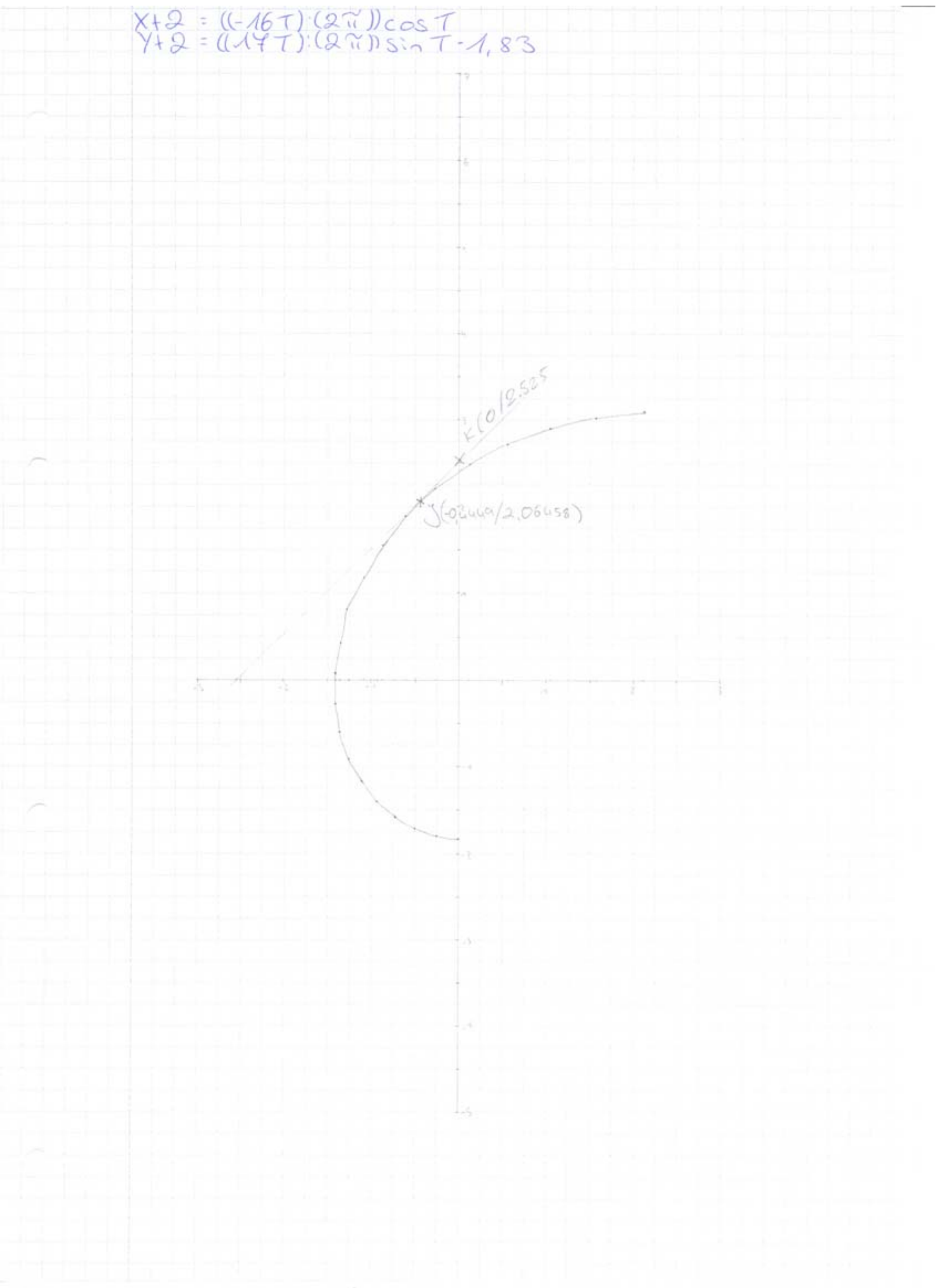
4.2.2. Korrekturen

In diesem Kapitel werde ich die Korrekturen an den Funktionen vornehmen. Hierzu werde ich zum einen neue Punkte bestimmen müssen und zum Anderen werde ich die Steigung der Spiralen, an dem Punkt an dem die Funktionen in die Spirale eintritt, zeichnerisch ermitteln.

Ich werde die Gleichungen allerdings nicht rein zeichnerisch ermitteln sonder über die Grundgleichung:

$y=mx+b$

Hierzu werde ich den Punkt in dem die Tangente ermittelt werden soll einsetzen und b abmessen. Alle Punkte, die ich hierfür benötige, werde ich in die Zeichnungen eintragen.



Für die zweite Spirale habe ich die Tangente im Punkt J(-0,4449;2,06458) ermittelt. Diese Spirale hat die Gleichungen:

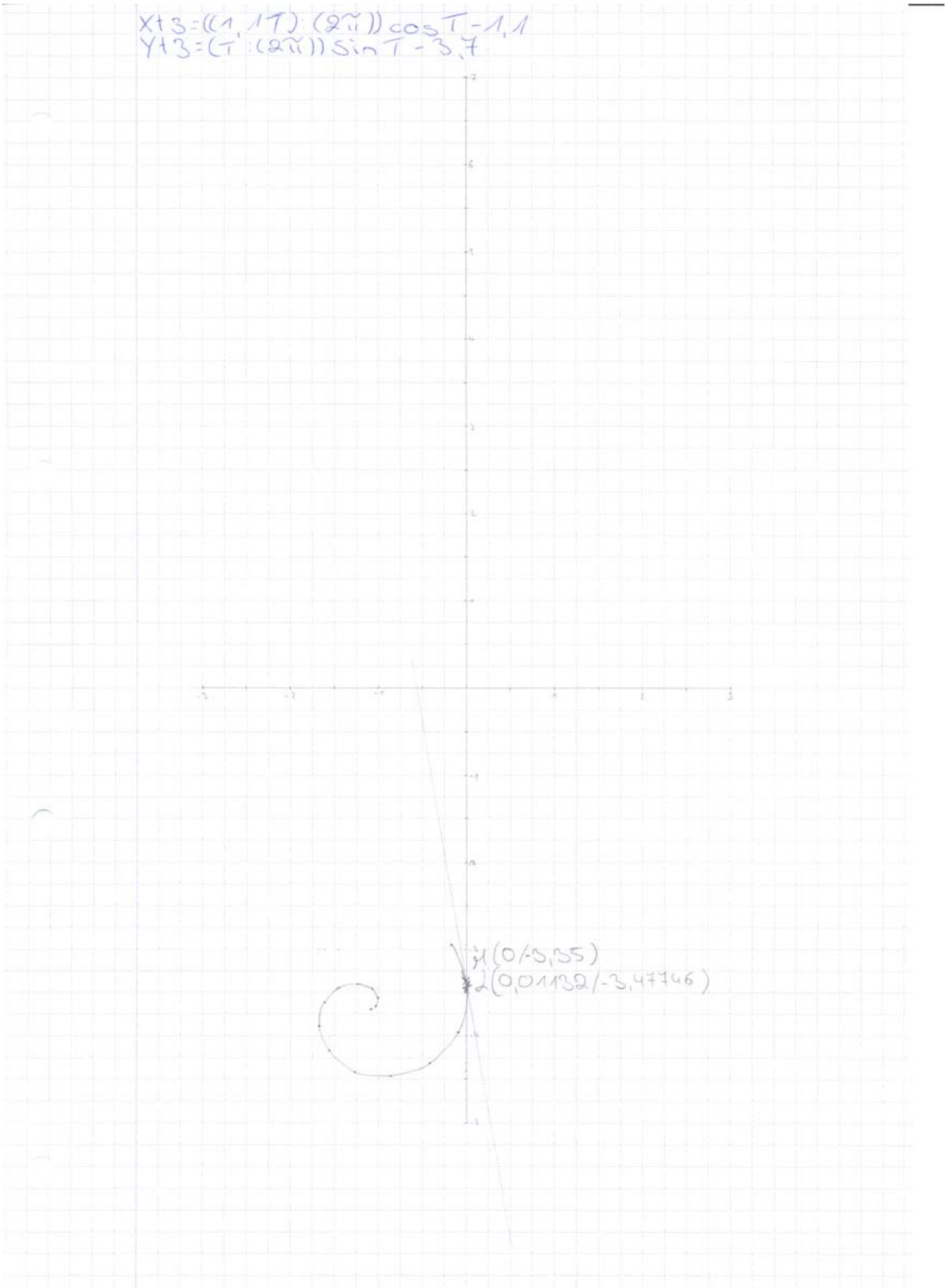
Xt2=((-16T)/(2π))*cosT

Yt2=((17T)/(2π))*sinT-1,83

Die ermittelte Tangente hat die Gleichung:

y2=1,03488x+2,525

Für die dritte Spirale habe ich die Tangente im Punkt L(0,01132;-3,47746) ermittelt.



Diese Spirale hat die Gleichungen:

Xt3=((1,1T)/(2π))*cosT-1,1

Yt3=(T/(2π))*sinT-3,7

Die Tangente hat hier die Gleichung:

$y3=-11{,}25972x-3{,}35$

Somit habe ich mehr Anhaltspunkte, um die endgültigen Funktionen zu ermitteln. Was ich auch im Folgenden machen werde.

Zunächst werde ich mich um die erste Funktion kümmern. Sie hatte die Gleichung:

$f_1(x)=-0{,}1907x^2+2{,}02172x+3$

Bei der erneuten Ermittlung der Funktion muss ich beachten, dass die Funktion in den kritischen Punkten C(0;3) und J(-0,4449;2,06458) jeweils die richtige Steigung hat. Da ich für den Punkt C(0;3) noch keine genaue Festlegung der Steigung habe, werde ich mich auf die richtige Steigung im Punkt J(-0,4449;2,06458) konzentrieren. Ich werde aber auch darauf achten, dass die Funktion ansonsten dem ungefähren Verlauf des G-Schlüssels folgt. Wenn sie das nach dem ersten Versuch nicht tut, werde ich die Funktion ändern müssen und mehr Punkte suchen müssen, die auf dem G-Schlüssel liegen.

Die Funktion $f_{1.1}(x)$ soll also durch die Punkte C(0;3) und J(-0,4449;2,06458) gehen und im Punkt J die Steigung y2=2,06458 haben, dass heißt, dass $f_{1.1}'(x)$ mit y2, in diesem Punkt, gleichzusetzen sein muss.

Ich erhalte hier die Gleichung:

$f_{1.1}(x)=0{,}08532x^2+2{,}1405x+3$

Obwohl diese Funktion die Anforderungen erfüllt, gefällt mir der Verlauf der Funktion nicht. Daher lege ich noch den Punkt N(-0,8;2) fest, durch den die Funktion verlaufen soll, was sie bis jetzt noch nicht tut.

Hier erhalte ich dann als Gleichung:

$f_{1.2}(x)=-5{,}4325x^3-4{,}7485x^2+1{,}06521x+3$

Diese Funktion entspricht den Anforderungen und der Verlauf sieht auch ganz gut aus. Um die Anschlussfunktion zu ermitteln, benötige ich hier allerdings noch die erste Ableitung:

$f_{1.2}'(x)=-16{,}2975x^2-9{,}49702x+1{,}06521$

Ich werde mich jetzt also mit der nächsten Funktion beschäftigen.

Die Funktionen sollen im Punkt C(0;3) ineinander übergehen. Die Funktion $f_{2.1}(x)$ soll außerdem durch den Punkt B(1,7;5,5) verlaufen. Als Funktion erhalte ich hier:

$f_{2.1}(x)=0{,}23846x^2+1{,}06521x+3$

Diese Funktion erfüllt alle Anforderungen, mir ist jedoch der Verlauf der Funktion am nächsten kritischen Punkt noch nicht steil genug, ich werde also noch einen Punkt hinzuziehen, und zwar den Punkt D(1,5;5). Daraufhin erhalte ich die Funktion:

$f_{2.2}(x)=0{,}29854x^3-0{,}26907x^2+1{,}06521x+3$

Diese Funktion erfüllt alle Bedingungen und ich bin mit ihrem Verlauf sehr zufrieden. Um mich um die nächste Funktion kümmern zu können muss ich noch die Funktion ableiten. Das sieht dann so aus:

$f_{2.2}'(x)=0{,}89562x^2-0{,}53814x+1{,}06521$

Ich kann jetzt um die nächste Funktion kümmern. Die Funktion soll durch den Punkt E(0;6,2) verlaufen und im Punkt B(1,7;5,5) die negative Steigung der Funktion $f_{2.2}(x)$ haben. Die Funktion wird dann durch diese Gleichung beschrieben:

$f_{3.1}(x)=-1{,}36879x^2+1{,}91518x+6{,}2$

Diese Funktion passt gut. Also werde ich hier noch die Ableitung festhalten:

$f_{3.1}'(x)=-2{,}73758x+1{,}91518$

Ich werde mich nun der vierten Funktion zuwenden. Hierzu benötige ich wieder ein paar Punkte. Ich werde zunächst die Punkte E(0;6,2) und L(0,01132;-3,47746) verwenden, wobei ich beachten muss, dass die Funktion in den gegebenen Punkten die richtige Steigung hat. Die Gleichung dieser Funktion sieht dann wie folgt aus:

$f_{4.1}(x)=13300874{,}24x^3-22{,}5917{,}8498x^2-1{,}9158x+6{,}2$

Da mir diese Funktion nicht richtig gefällt, werde ich einen Punkt ändern. Die Funktion soll dann im Punkt O(-0,2;5,76221) anschließen. Ich behalte den Punkt L(0,01132;-3,47746) als Anschlussstelle an die Spirale bei. Dann erhalte ich diese Funktion:

$f_{4.2}(x)=1825{,}21429x^3+514{,}17114x^2-15{,}82x-3{,}36691$

Da diese Funktion die Bedingungen erfüllt und der Verlauf der Funktion in Ordnung ist, werde ich diese Funktion verwenden. Ich werde sie allerdings noch ableiten:

$f_{4.2}'(x)=5475{,}64287x^2+1028{,}34228x-15{,}82$

Damit habe ich alle Funktionen für den G-Schlüssel zusammen.

5. Schluss

Jetzt ist der G-Schlüssel fertig. Ich werde im Folgenden noch einmal auflisten, wie die Gleichungen in den GTR einzugeben sind. Ebenso werde ich hier sofort den Definitionsbereich der Gleichungen festlegen:

Xt1=((-3.6T)/(2π))*cosT+0.25

Yt1=((2.8T)/(2π))*sinT+0.3,[0,4.8]

Xt2=((-16T)/(2π))*cosT

Yt2=((17T)/(2π))*sinT-1.83,[0,1.45]

$f_{1.2}(x)=-5.4325x^3-4.7485x^2+1.06521x+3,[-0.4449,0]$

$f_{2.2}(x)=0.29854x^3-0.26907x^2+1.06521x+3,[0,1.7]$

$f_{3.1}(x)=-1.36879x^2+1.91518x+6.2,[-0.2,1.7]$

$f_{4.2}(x)=1825.21429x^3+514.17114x^2-15.82x-3.36691,[-0.2,0.01132]$

Xt3=((1.1T)/(2π))*cosT-1.1

Yt3=(T/(2π))*sinT-3.7,[0,6.5]

Jetzt stellt man noch das View-Window richtig ein, und zwar mit x von -12 bis 12 und Y von -5 bis 7, T geht von 0 bis 7, man muss allerdings beachten, dass man den GTR auf Radiant eingestellt hat.

Als Letztes werden nur noch die Funktionen, wie oben angegeben, in den GTR eingegeben und schon erhält man einen schönen Violinen-G-Schlüssel.